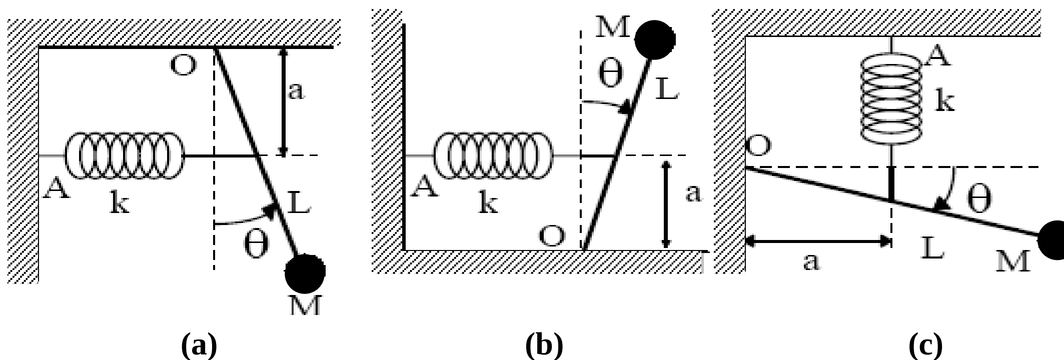
SERIE SUPLÉMENTAIRE N° 02

(Oscillations libres non amorties - systèmes à 1 degré de liberté)

EXERCICE N° 01.

Dans les figures ci-dessous, une masse **M** fixée à une tige de longueur **L** oscille sans frottement, dans un plan vertical, autour d'un axe fixe perpendiculaire au plan du mouvement en **O**.

1. Pour les 3 cas, établir l'équation différentielle du mouvement dans le cas des mouvements de faibles amplitudes.
2. A quelle condition le système de la figure (b) peut-il osciller? Quelle est la nature du mouvement lorsque cette condition n'est pas satisfaite?
3. Expliquer pourquoi la période des oscillations est indépendante de g dans le cas de la figure (c).



(a) **(b)** **(c)**

EXERCICE N° 02.

Un point matériel de masse **10 g** et d'énergie mécanique (totale) **E = 3,1 x 10^{-5}** oscille harmoniquement avec une amplitude égale à **5 cm**.

1. Ecrire l'équation du mouvement harmonique du point matériel en utilisant les valeurs numériques des coefficients. La phase initiale est de **π/4.**
2. Calculer le temps que met le point pour se déplacer depuis la position d'équilibre jusqu'à sa position maximale, sachant que le point effectue un mouvement oscillatoire défini par : $x(t) = 7sin\ (0.5\pi t)$

EXERCICE N° 03.

Dans la figure **N°1**, M et R représentent respectivement la masse et le rayon d'une poulie homogène de moment d'inertie $J_{/O} = \frac{1}{2}\ MR^2$. A la poulie sont fixés un ressort de raideur **k** et un corps de masse **m** par un fil non élastique de masse négligeable. On néglige aussi la masse du ressort et le frottement autour de l'axe de la poulie. Si x est le déplacement vertical de la masse **m**, Trouvez l'équation du mouvement et la pulsation propre du système.

EXERCICE N° 04.

Pour le système mécanique de la figure **N°2**, on considère une barre de masse négligeable de longueur **2L**. Sur ses extrémités sont fixés deux masses m_1 et m_2 et des ressorts k_1, k_2 **et** k_3. La position d'équilibre correspond à $\theta(0) = 0$.

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement libre pour des oscillations de faibles amplitudes.
2. Trouver la solution ***θ(t).***

EXERCICE N° 05. Dans la figure **3**, un disque circulaire homogène, de masse **M**, de rayon **R**, peut osciller sur un plan horizontal en roulant sans glisser autour de son axe **0**. Deux ressorts k_1 et k_2 sont fixés sur le disque aux points **A** et **B** tels que : ***OA = R et OB = a***. Une masse **m** est fixée sur le disque à une distance **b** du centre **O**. La position d'équilibre du système est telle que les 2 points **A, B** et la masse **m** se trouvent simultanément sur l'axe vertical **OY**.

1. Représenter le système en état de mouvement.
2. Calculer la fonction de Lagrange L.
3. Déterminer l'équation du mouvement et la pulsation propre pour des oscillations de faibles amplitudes.
4. Déterminer la solution θ(t), sachant que $\theta(0) = \theta_0\ et\ \dot{\theta}(0) = 0$.

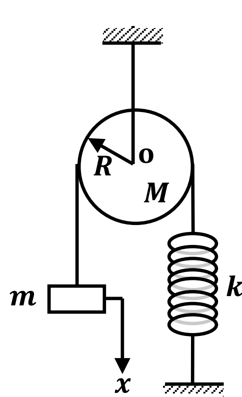


Figure 1

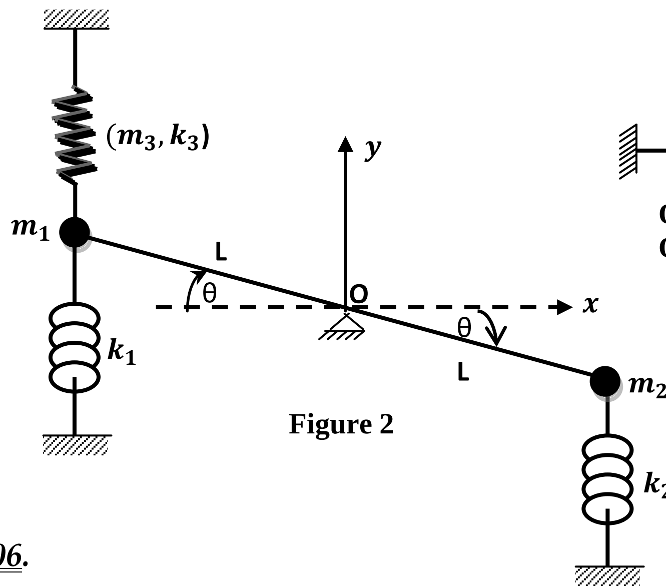


Figure 2

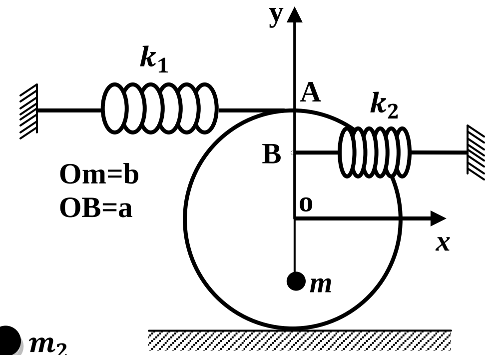


Figure 3

EXERCICE N° 06.

Ecrire l'équation du mouvement pour chacun des systèmes illustrés ci-dessous :

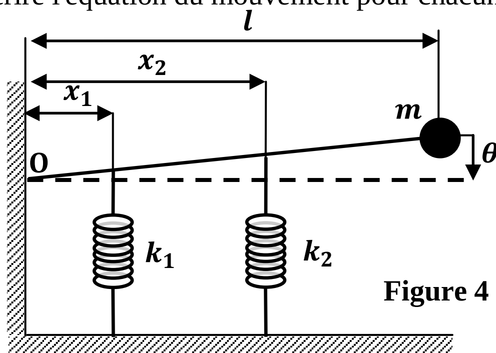


Figure 4

Figure 4. ***Barre de longueur l sans masse portant une masse m et oscillant autour de l'axe O. A l'équilibre la barre est horizontal et*** $\theta = 0$.

Figure 5. ***Cylindre de masse m autour d'un axe fixe rappelé par un ressort k. Le fil qui relie les masses m et μ s'enroule sans glisser sur le pourtour du cylindre.***

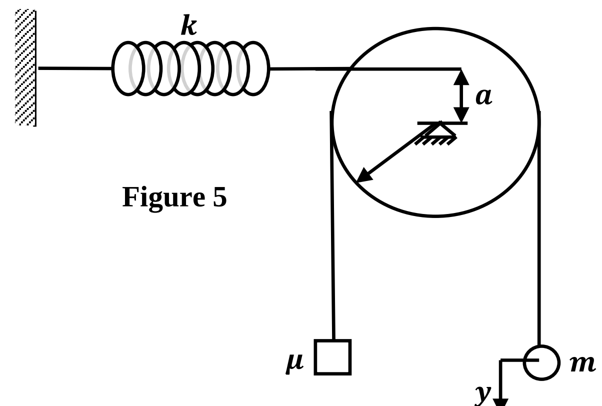


Figure 5

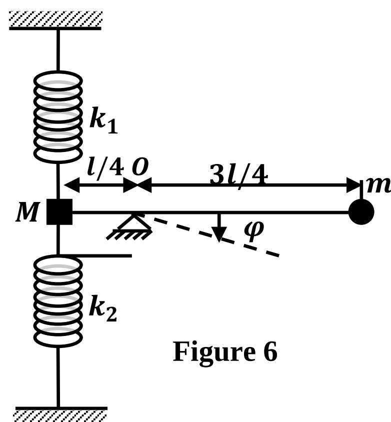


Figure 6

Figure 6. ***Fléau portant des masses m et M oscillant autour d'un axe fixe O. A l'équilibre la barre horizontale et*** $\varphi = 0$

Figure 7. ***Bras de longueur l solidaire du cylindre M qui roule sans glisser. A l'équilibre le bras est vertical et*** $\varphi = 0$

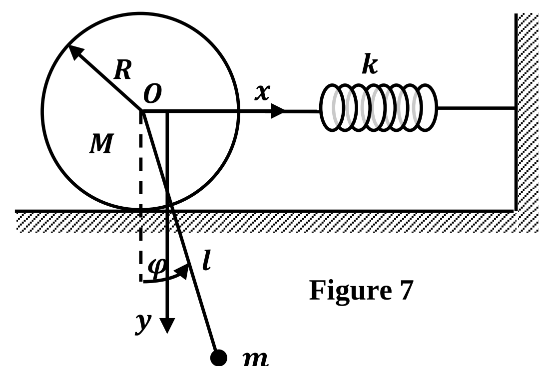


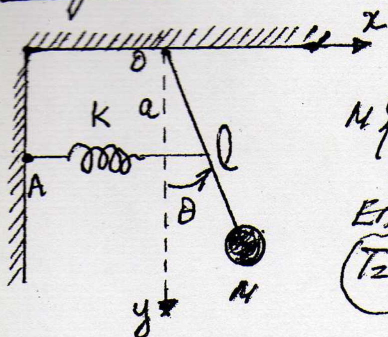
Figure 7

Serie supplementaire N°2

Exercice N°1

Calcul de l'équation diff. pour

Le système a



$M \begin{cases} x_M = l\sin\theta \\ y_M = l\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l\dot\theta\cos\theta \\ -l\dot\theta\sin\theta \end{cases}$

Energie cinétique

$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2$ (1pt)

Energie potentielle $U = U_m + U_K$ (1pt)

$U = -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}K(a\sin\theta)^2$

Fonction de Lagrange $L = T - U$

$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2 + mgl\cos\theta - \frac{1}{2}K(a\sin\theta)^2$

le Formalisme de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = ml^2\dot\theta,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = ml^2\ddot\theta$

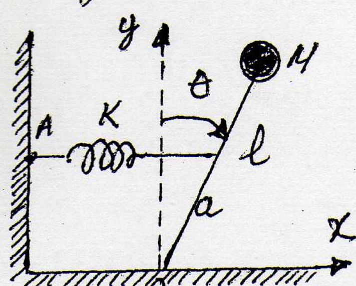
$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta - K(a\cos\theta)(a\sin\theta)$

$\Rightarrow ml^2\ddot\theta + mgl\sin\theta + Ka^2\cos\theta\sin\theta = 0$

pour des oscillations de faibles amplitudes $\sin\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1$ on aura

$ml^2\ddot\theta + (mgl + Ka^2)\theta = 0$ (2pts)

Le système b



$M \begin{cases} l\sin\theta \\ l\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l\dot\theta\cos\theta \\ -l\dot\theta\sin\theta \end{cases}$

Energie cinétique

$T = \frac{1}{2} M l^2 \dot\theta^2$ (1pt)

Energie potentielle $U = U_m + U_K$

$U = mgl\cos\theta + \frac{1}{2}K(a\sin\theta)^2$ (1pt)

Fonction de Lagrange $L = T - U$

$L = \frac{1}{2} M l^2 \dot\theta^2 - mgl\cos\theta - \frac{1}{2}K(a\sin\theta)^2$

le formalisme de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = Ml^2\dot\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = Ml^2\ddot\theta$

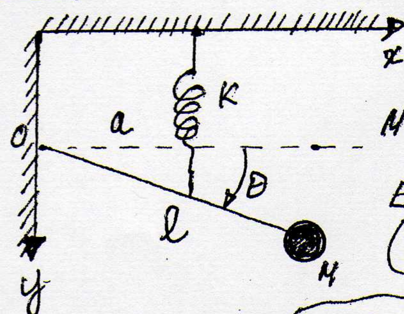
$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mgl\sin\theta - \frac{1}{2}K(a\cos\theta)(a\sin\theta)\times 2$

$\Rightarrow Ml^2\ddot\theta - mgl\sin\theta + Ka^2\cos\theta\sin\theta = 0$

pour des oscillations de faibles amplitudes $\sin\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1$ on aura

$Ml^2\ddot\theta + (Ka^2 - mgl)\theta = 0$ (2pts)

Le système c



$M \begin{cases} l\cos\theta \\ l\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -l\dot\theta\sin\theta \\ l\dot\theta\cos\theta \end{cases}$

Energie cinétique

$T = \frac{1}{2} M l^2 \dot\theta^2$ (1pt)

Energie potentielle $U = \frac{1}{2}K(a\sin\theta)^2$ (1pt)

Fonction de Lagrange $L = T - U$

$L = \frac{1}{2} M l^2 \dot\theta^2 - \frac{1}{2}K(a\sin\theta)^2$

$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = Ml^2\dot\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = Ml^2\ddot\theta$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -K(a\cos\theta)(a\sin\theta)$

$\Rightarrow$ L'équa. diff est $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$Ml^2\ddot\theta + Ka^2\theta = 0$ (2pts)

2- Condition pour laquelle le système b peut osciller

Dans le cas (b), le système ne peut osciller que si $\frac{K}{M}\left(\frac{a}{l}\right)^2 - \frac{g}{l} > 0$ donc

$Ka^2 > mgl$

sinon le mvt n'est pas oscillatoire

3- La cause pour laquelle la période d'oscillat est independante de g dans le cas (c)

Dans le cas de la figure (c), à l'état d'équilibre les 2 forces $\vec{P} = m\vec{g}$ et $\vec{F} = -K\vec{x}_0$ se compensent entre elles $\Rightarrow$ l'énergie potentielle ne peut pas

contenir un terme gravitationnel $\Rightarrow$ la période est indépendante de g.

Exercice 02

$m = 10g$, $E = 3{,}1\times10^{-5} J$ obéit à

l'équation $x(t) = A\sin(\omega_0 t+\varphi)$ | $A = 5cm$, $\omega_0^2 = K/m$

1- Écriture de l'équation du mvt harmonique en utilisant les valeurs numériques des Coefficients

la phase initiale est de $\frac{\pi}{4}$ (rd)

L'énergie totale $E = T+U$ | $x = A\sin(\omega_0 t+\varphi)$, $\dot{x} = A\omega_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$

$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}Kx^2$

$E = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)+\frac{1}{2}KA^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi)$

sachant que $K = m\omega_0^2$ on aura

$E = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)+\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi)$

$E = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \Rightarrow \frac{2E}{mA^2} = \omega_0^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2E}{mA^2}}$

A.N $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\times3{,}1\times10^{-5}}{10.10^{-3}\times(5\times10^{-2})^2}} = 1{,}6$ rd/s

$\Rightarrow x(t) = 5\times10^{-2}\sin(1{,}6t+\pi/4)$ (m)

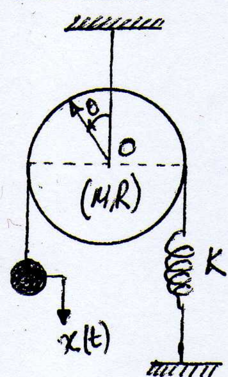
2- Calcul du temps que met le pt pour se déplacer jusqu'à sa position maximale sachant que

$x(t) = 7\sin(0{,}5\pi t)$

$\omega_0 = 0{,}5\pi = \frac{2\pi}{T}$ (rd/s) $\Rightarrow T = \frac{2}{0{,}5}$ (4s)

pour aller de l'équilibre $\rightarrow$ jusqu'à la position maximale $t = \frac{T}{4} = 1$ (s)

Exercice 03



poulie homogène $J_0 = \frac{1}{2}MR^2$

Écriture de l'équation du mvt et la pulsation propre ω_0 du système

* Énergie cinétique $T = T_M+T_m$ $\quad x = 2R\theta$

$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$T = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2+\frac{4}{2}mR^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3M}{2}+4m\right)R^2\dot{\theta}^2$

$T = \frac{1}{2}\left(\frac{3M}{2}+4m\right)R^2\dot{\theta}^2$

* Énergie potentielle $U = \frac{1}{2}K(2R\theta)^2$

* Fonction de Lagrange $L = T-U$

$L = \frac{1}{2}\left(\frac{3M}{2}+4m\right)R^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}K(2R\theta)^2$

$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \left(\frac{3M}{2}+4m\right)R^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \left(\frac{3M}{2}+4m\right)R^2\ddot{\theta}$

$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -K(2R)(2R\theta)$

le Formalisme de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$

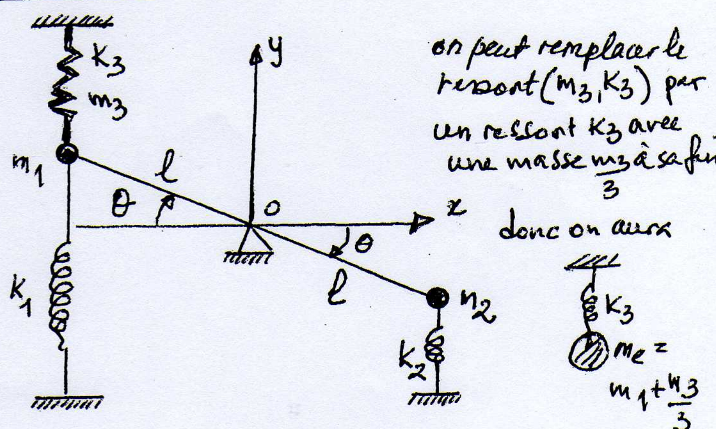
$\left(\frac{3M}{2}+4m\right)R^2\ddot{\theta}+4KR^2\theta = 0$ ou

$(3M+8m)\ddot{\theta}+8K\theta = 0$

pulsation propre ω_0

$\ddot{\theta}+\underbrace{\frac{8K}{3M+8m}}_{\omega_0^2}\theta = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{8K}{3M+8m}}$

Exercice 04



on peut remplacer le ressort (m_3, K_3) par un ressort K_3 avec une masse $\frac{m_3}{3}$ à sa fin

donc on aura K_3, $m_e = m_1+\frac{m_3}{3}$

1- Écriture de l'équation différ. du mvt

* Les Coordonnées

$m_e\begin{cases}-l\cos\theta\\+l\sin\theta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}l\dot{\theta}\sin\theta\\l\dot{\theta}\cos\theta\end{cases}$

$m_2\begin{cases}+l\cos\theta\\-l\sin\theta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-l\dot{\theta}\sin\theta\\-l\dot{\theta}\cos\theta\end{cases}$

* Énergie cinétique $T = T_{m_e}+T_{m_2}$

$T = \frac{1}{2}\underbrace{(m_e+m_2)}_{m}l^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$ $\quad m = m_e+m_2$

* Énergie potentielle $U = U_{K_1}+U_{K_2}+U_{K_3}$

$U = \frac{1}{2}K_1(l\sin\theta)^2+\frac{1}{2}K_2(l\sin\theta)^2+\frac{1}{2}K_3(l\sin\theta)^2$

$U = \frac{1}{2}K(l\sin\theta)^2$ $\quad K = K_1+K_2+K_3$

: Fonction de Lagrange $L = T - U = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} K (l \sin\theta)^2$

: Formalisme de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m l^2 \ddot{\theta}$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -K(l \underbrace{\cos\theta}_{1})(l \underbrace{\sin\theta}_{\theta})$

Donc l'equa. diff. s'ecrit

$m l^2 \ddot{\theta} + K l^2 \theta = 0$ ou $m\ddot{\theta} + K\theta = 0$

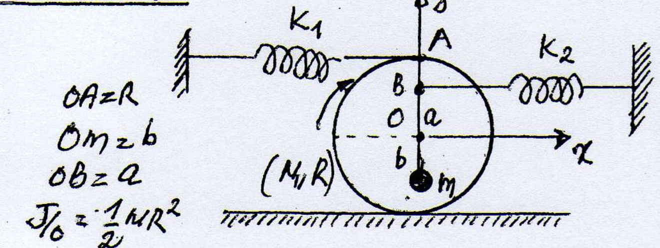
2- Ecriture de la solution $\theta(t)$

$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ Syst. libre non amorti donc

la solution $\theta(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ $\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{K}{m}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_1 + K_2 + K_3}{m_1 + \frac{m_3}{3} + m_2}}$

Exercice 05

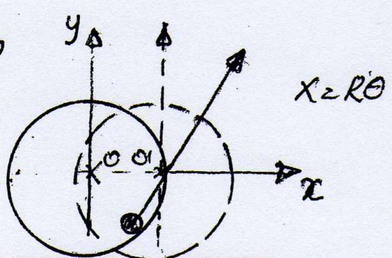


$J_0 = \frac{1}{2} M R^2$

Le disque roule sans glissement sur le plan

1- Representation du systeme en mouvement

- Calcul de la fonction de Lagrange $L = T - U$



$X = R\theta$

Coordonnées

$\begin{cases} X = R\theta \\ 0 \end{cases}$

$\begin{cases} X - b\sin\theta \\ 0 - b\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R\theta - b\sin\theta \\ -b\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R\dot{\theta} - b\dot{\theta}\cos\theta \\ b\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$

Energie cinetique $T = T_M + T_m$

$T = \frac{1}{2} M \dot{X}^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m [(R-b)^2 \dot{\theta}^2]$

$T = \left(\frac{3}{4} M R^2 + \frac{1}{2} m (R-b)^2\right) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{3 M R^2}{2} + m(R-b)^2\right] \dot{\theta}^2 = T$

Energie potentielle $U = U_m + U_{K_1} + U_{K_2}$

$U = -mgb\cos\theta + \frac{1}{2} K_1 (2R\theta)^2 + \frac{1}{2} K_2 (R\theta + a\theta)^2$

Fonction de Lagrange $L = T - U$

$L = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} M R^2 + m(R-b)^2\right] \dot{\theta}^2 + mgb\cos\theta - \frac{1}{2} K_1 (2R\theta)^2 - \frac{1}{2} K_2 (R+a)^2 \theta^2$

3- Determination de l'equa. diff. du mvt

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{3}{2} M R^2 + m(R-b)^2\right) \dot{\theta} \Rightarrow$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{3}{2} M R^2 + m(R-b)^2\right) \ddot{\theta}$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgb \underbrace{\sin\theta}_{\theta} - K_1 (2R)(2R\theta) - K_2 (R+a)^2 \theta$

$\Rightarrow$

$\left[\frac{3}{2} M R^2 + m(R-b)^2\right] \ddot{\theta} + \left[mgb + 4K_1 R^2 + K_2 (R+a)^2\right] \theta = 0$

4- Determination de la solution $\theta(t)$

$\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{mgb + 4K_1 R^2 + K_2 (R+a)^2}{\frac{3}{2} M R^2 + m(R-b)^2}}_{\omega_0^2} \theta = 0$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgb + 4K_1 R^2 + K_2 (R+a)^2}{\frac{3}{2} M R^2 + m(R-b)^2}}$

$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ Syst. libre non amorti

donc la solution $\theta(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$

sachant que $(\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0)$

$\dot{\theta}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\theta(0) = A \sin\varphi = \theta_0$

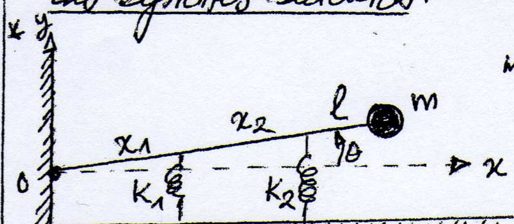
$\dot{\theta}(0) = A\omega_0 \cos\varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow$

$\varphi = \pi/2 \Rightarrow A = \theta_0$

$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \pi/2)$

Exercice 06

Ecriture de l'equa. du mvt pour chacun des systemes suivants:



$m \begin{cases} + l\cos\theta \\ + l\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -l\dot{\theta}\sin\theta \\ l\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$

* Energie cinetique $\left(T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2\right)$

Energie potentielle $U = U_{K_1} + U_{K_2}$

$$U = \frac{1}{2} k_1 (x_1 \sin\theta)^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 \sin\theta)^2$$

$$U = \frac{1}{2} \left(k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2\right) \sin^2\theta$$

* Fonction de Lagrange $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \left(k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2\right) \sin^2\theta$$

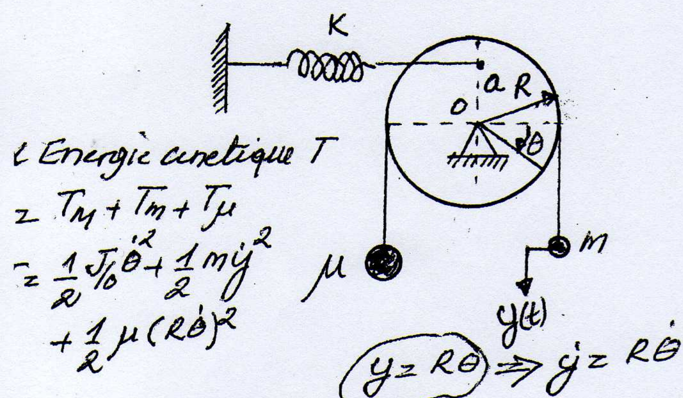
* Formalisme de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = m l^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\left(k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2\right) \underbrace{\cos\theta}_{1} \underbrace{\sin\theta}_{\theta}$$

$$\Rightarrow \left(m l^2 \ddot{\theta} + \left(k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2\right) \theta = 0\right)$$

*



* Energie cinetique T

$$= T_M + T_m + T_\mu$$

$$= \frac{1}{2} J_{/O} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \mu (R\dot{\theta})^2$$

$$y = R\theta \Rightarrow \dot{y} = R\dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2} \left(J_{/O} + (m+\mu) R^2\right) \dot{\theta}^2$$

Energie potentielle $\left(U = \frac{1}{2} K (a \sin\theta)^2\right)$

Fonction de Lagrange $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2} \left(J_{/O} + (m+\mu) R^2\right) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} K (a \sin\theta)^2$$

Formalisme de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

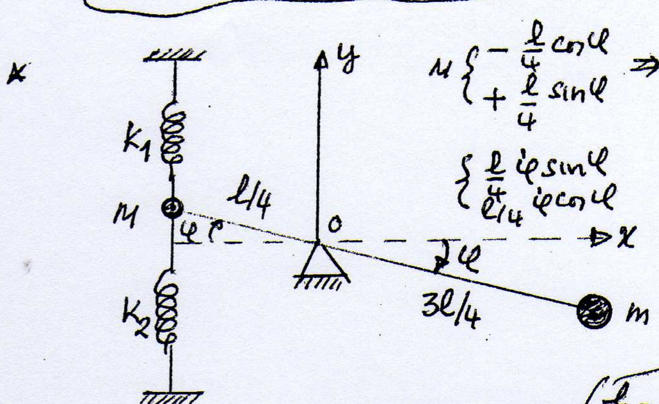
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(J_{/O} + (m+\mu) R^2\right) \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(J_{/O} + (m+\mu) R^2\right) \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -K (a \underbrace{\cos\theta}_{1}) (a \underbrace{\sin\theta}_{\theta})$$

$$\Rightarrow \left(\left(J_{/O} + (m+\mu) R^2\right) \ddot{\theta} + K a^2 \theta = 0\right)$$

*



$$M \begin{cases} -\frac{l}{4} \cos\varphi \\ +\frac{l}{4} \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{l}{4} \dot{\varphi} \sin\varphi \\ \frac{l}{4} \dot{\varphi} \cos\varphi \end{cases}$$

$$m \begin{cases} +\frac{3l}{4} \cos\varphi \\ -\frac{3l}{4} \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{3l}{4} \dot{\varphi} \sin\varphi \\ -\frac{3l}{4} \dot{\varphi} \cos\varphi \end{cases}$$

$$\frac{l}{4} = a \qquad \frac{3l}{4} = b$$

* Energie cinetique $T = T_M + T_m = \frac{1}{2} M a^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m b^2 \dot{\varphi}^2$

$$T = \frac{1}{2} \left(M a^2 + m b^2\right) \dot{\varphi}^2$$

* Energie potentielle $U = U_{K_1} + U_{K_2}$

$$U = \frac{1}{2} K_1 (a \sin\varphi)^2 + \frac{1}{2} K_2 (a \sin\varphi)^2$$

$$U = \frac{1}{2} K (a \sin\varphi)^2 \quad / \quad \left(K = K_1 + K_2\right)$$

* Fonction de Lagrange $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2} \left(M a^2 + m b^2\right) \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} K (a \sin\varphi)^2$$

* Formalisme de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \left(M a^2 + m b^2\right) \dot{\varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \left(M a^2 + m b^2\right) \ddot{\varphi}$$

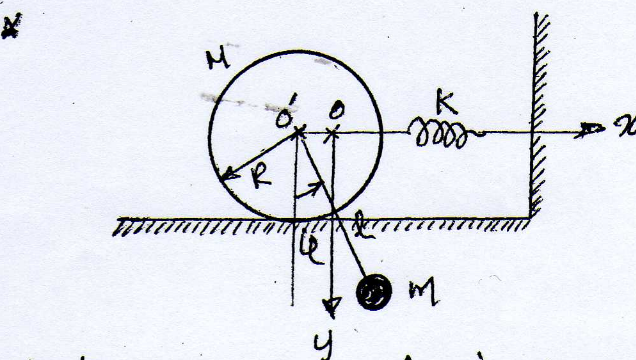
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -K (a \underbrace{\cos\varphi}_{1}) (a \underbrace{\sin\varphi}_{\varphi})$$

$$\Rightarrow \left(M a^2 + m b^2\right) \ddot{\varphi} + K a^2 \varphi = 0$$

$$\left(\frac{M l^2}{16} + \frac{9 m l^2}{16}\right) \ddot{\varphi} + K \frac{l^2}{16} \varphi = 0$$

$$\left((M + 9m) \ddot{\varphi} + K \varphi = 0\right)$$

*



Le disque roule sans glissement sur le plan

* Coordonnées

$J_{/0} = \frac{1}{2} MR^2$

$M \begin{cases} -R\varphi \\ 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -R\dot{\varphi} \\ 0 \end{cases}$

$m \begin{cases} -R\varphi + l\sin\varphi \\ 0 + l\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -R\dot{\varphi} + l\dot{\varphi}\cos\varphi \\ -l\dot{\varphi}\sin\varphi \end{cases}$

* Energie cinétique $T = T_M + T_m$

$T_M = \frac{1}{2} M R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_{/0} \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4} MR^2 \dot{\varphi}^2$

$T_m = \frac{1}{2} m (l-R)^2 \dot{\varphi}^2$

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} MR^2 + m(l-R)^2\right]\dot{\varphi}^2$$

* Energie potentielle $U = U_m + U_K$

$$U = -mgl\cos\varphi + \frac{1}{2} KR^2\varphi^2$$

* Fonction de Lagrange $L = T - U$

$L = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} MR^2 + m(l-R)^2\right]\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi - \frac{1}{2} KR^2\varphi^2$

Formalisme de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \left[\frac{3}{2} MR^2 + m(l-R)^2\right]\dot{\varphi}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \left[\frac{3}{2} MR^2 + m(l-R)^2\right]\ddot{\varphi}$

$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\underset{\varphi}{\sin\varphi} - KR^2\varphi$

Donc l'équa. diff. s'écrit

$$\left[\frac{3}{2} MR^2 + m(l-R)^2\right]\ddot{\varphi} + (mgl + KR^2)\varphi = 0$$

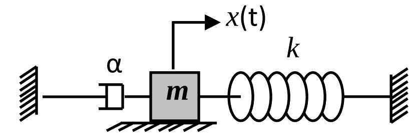
Série Supplémentaire 3

Oscillations amorties des systèmes à un degré de liberté

Exercice 1

Supposant que le système suivant effectue des oscillations de faibles amplitudes.

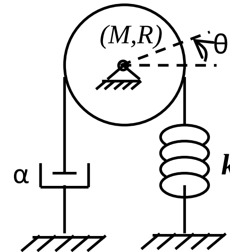
- Déterminer l'équation différentielle du mouvement en fonction de δ et ω_o et déduire ω_a.
- Pour $\delta<\omega_o$, Trouver la solution de l'équation différentielle.



Exercice 2

Supposant que le système suivant effectue des oscillations de faibles amplitudes.

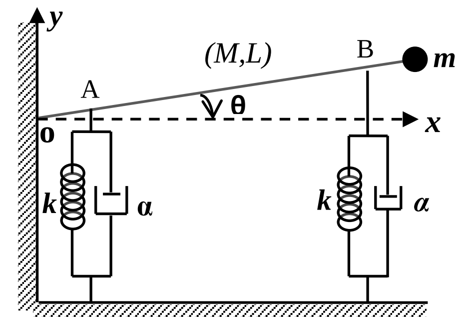
- Déterminer l'équation différentielle du mouvement en fonction de δ et ω_o.
- Pour $\delta < \omega_o$, Trouver la solution générale de l'équation différentielle.
  ($J_{/o} = \frac{1}{2}MR^2$).



Exercice 3

Soit le système mécanique vibratoire représenté sur la figure ci-contre.
Si G est le centre de gravité de la barre de masse M et de longueur L.

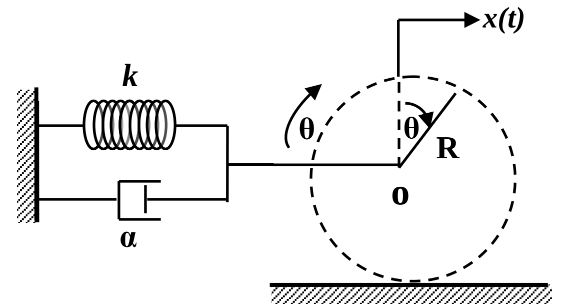
- Trouver l'équation différentielle du mouvement. Déduire ω_o et δ.
- Ecrire l'équation du mouvement dans le cas $\delta < \omega_0$,
  ($J_{/G} = \frac{1}{12}ML^2, OA = L_1, OB = L_2$).



Exercice 4

Soit le système mécanique composé d'un disque (**M,R**) qui peut rouler sans glisser sur un plan horizontal, d'un ressort k et d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux **α**.

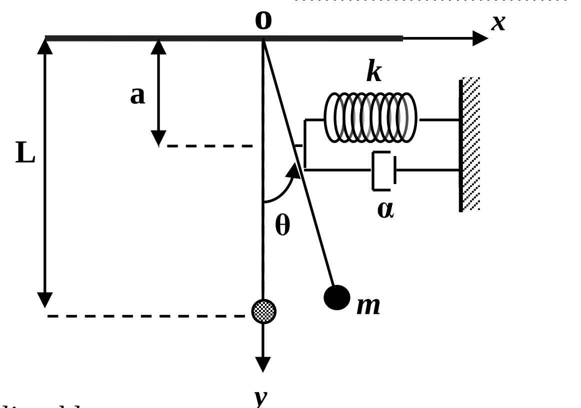
- Déterminer l'équation différentielle du mouvement en fonction de δ et ω_o , et déduire ω_a.
- Trouver l'équation du mouvement, ($J_{/o} = \frac{1}{2}MR^2$).



Exercice 5

Soit une masse m fixée à l'extrémité d'une tige de masse négligeable et de longueur **L**. La tige effectue des oscillations de faibles amplitudes autour d'un axe fixe passant par le point **O** et perpendiculaire au plan du mouvement

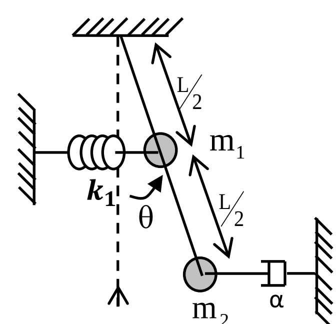
- Etablir l'équation différentielle du mouvement.
- Déterminer la pulsation propre du système.
- Trouver l'équation du mouvement.



Exercice 6

Le système est constitué de **2** masses m_1 et m_2, d'une tige de masse négligeable et de longueur **L** et d'un ressort k_1 et d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux **α** (Voir figure).

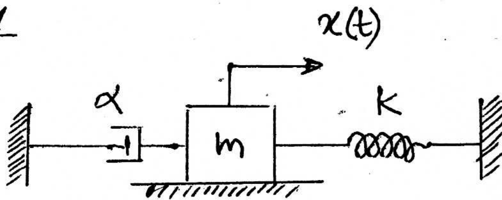
- Ecrire l'équation différentielle du mouvement, sachant que le système effectue des oscillations de faible amplitude.
- Déterminer la pulsation propre du système.
- Trouver l'équation du mouvement, sachant que : $\theta(0) = \theta_0$ **et** $\dot{\theta}(0) = 0$
  On donne : $\frac{m_1}{4} = m_2 = m$ **et** $\frac{k_1}{4} = k$



Position d'équilibre

Serie supplementaire N°3

Exercice N°1



1 Determination de l'equa. diff. en fonction de δ et ω_0

- Energie cinetique $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ (0,5)
- Energie potentielle $U = \frac{1}{2} K x^2$ (0,5)
- Fonction de dissipation $D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$ (0,5)
- Fonction de Lagrange $L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} K x^2$
- Formalisme de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$ | $\Rightarrow m\ddot{x} + Kx = -\alpha\dot{x}$

$\frac{\partial L}{\partial x} = -Kx$, $\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha\dot{x}$

L'equa. diff. s'écrit $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + Kx = 0$ (0,5)

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (0,5)

tel que $2\delta = \frac{\alpha}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ (0,5)

déduction de $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{K}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}} = \omega_a$ (0,5)

Ecriture de la solution de l'equa. diff. pour $\delta < \omega_0$

$x(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi)$ (1pt)

Exercice N°2

Determination de l'equa. diff. en fonction de δ et ω_0

(M,R) — $J_{/0} = \frac{1}{2} MR^2$

Energie cinetique $T = \frac{1}{2} J_{/0} \dot{\theta}^2$ (0,5)

Energie potentielle $U = \frac{1}{2} K (R\theta)^2$ (0,5)

Fonction de dissipation $D = \frac{1}{2} \alpha (R\dot{\theta})^2$ (0,5)

Fonction de Lagrange $L = T - U = \frac{1}{2} J_{/0} \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} K (R\theta)^2$

Formalisme de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J_{/0}\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = J_{/0}\ddot{\theta}$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -KR^2\theta$, $\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha R^2\dot{\theta}$

$\Rightarrow J_{/0}\ddot{\theta} + KR^2\theta = -\alpha R^2\dot{\theta} \Rightarrow$

$\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + KR^2\theta = 0 \Rightarrow$ (0,5)

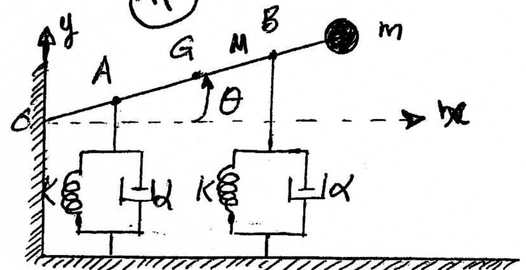
$M\ddot{\theta} + 2\alpha\dot{\theta} + 2K\theta = 0$ ou

$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ (0,5) tel que $\begin{cases} \delta = \frac{\alpha}{M} \\ \omega_0^2 = \frac{2K}{M} \end{cases}$ (0,5)

* Solution de l'equa. diff lorsque $\delta < \omega_0$

$\theta(t) = C e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$ (1pt) / $\omega_a = \sqrt{\frac{2K}{M} - \frac{\alpha^2}{M^2}}$

Exercice 03



$J_{/G} = \frac{1}{12} ML^2$

$OA = L_1$

$OB = L_2$

1- Ecriture de l'equation diff. du mvt

* Coordonnées

$m \begin{cases} l\cos\theta \\ l\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -L\dot{\theta}\sin\theta \\ L\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$

* Energie cinetique $T = T_M + T_m$

$T = \frac{1}{2} J_{/0}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2$ / $J_{/0} = J_{/G} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$

$J_{/0} = \frac{1}{12} ML^2 + M\frac{L^2}{4}\cdot\frac{3}{3} = \frac{1}{3} ML^2$

$T = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{3} + m\right)L^2\dot{\theta}^2$ (1pt)

* Energie potentielle $U = U_{K_1} + U_{K_2}$

$U = \frac{1}{2}K(L_1\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}K(L_2\sin\theta)^2$ (1pt)

* Fonction de dissipation $D = D_{\alpha_A} + D_{\alpha_B}$

$D = \frac{1}{2}\alpha(L_1\dot{\theta}\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}\alpha(L_2\dot{\theta}\cos\theta)^2$ (1pt)

* La Fonction de Lagrange $L = T - U$

$L = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{3} + m\right)L^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}K(L_1\sin\theta)^2 - \frac{1}{2}K(L_2\sin\theta)^2$

* le Formalisme de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \left(\frac{M}{3} + m\right)L^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left(\frac{M}{3} + m\right)L^2\ddot{\theta}$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -K(L_1\cos\theta)(L_1\sin\theta) - K(L_2\cos\theta)(L_2\sin\theta)$

$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha(L_1\cos\theta)(L_1\dot{\theta}\cos\theta) + \alpha(L_2\cos\theta)(L_2\dot{\theta}\cos\theta)$

L'équa. diff. s'écrit comme suit pour des oscillations de faible amplitude $\sin\theta \simeq \theta$, $\cos\theta \simeq 1$

$$\left(\frac{M}{3}+m\right)L^2\ddot{\theta}+(L_1^2+L_2^2)K\theta=-\alpha(L_1^2+L_2^2)\dot{\theta}$$

$$\left(\frac{M}{3}+m\right)L^2\ddot{\theta}+\alpha(L_1^2+L_2^2)\dot{\theta}+K(L_1^2+L_2^2)\theta=0$$ → (1pt)

Déduction de ω_0 et δ

On peut écrire l'équat. diff. comme

$$\ddot{\theta}+\underbrace{\frac{\alpha(L_1^2+L_2^2)}{\left(\frac{M}{3}+m\right)L^2}}_{2\delta}\dot{\theta}+\underbrace{\frac{K(L_1^2+L_2^2)}{\left(\frac{M}{3}+m\right)L^2}}_{\omega_0^2}\theta=0$$

$$2\delta=\frac{\alpha(L_1^2+L_2^2)}{\left(\frac{M}{3}+m\right)L^2}\Rightarrow \delta=\frac{\alpha(L_1^2+L_2^2)}{2\left(\frac{M}{3}+m\right)L^2}$$

$$\omega_0^2=\frac{K(L_1^2+L_2^2)}{\left(\frac{M}{3}+m\right)L^2}\Rightarrow \omega_0=\sqrt{\frac{K(L_1^2+L_2^2)}{\left(\frac{M}{3}+m\right)L^2}}$$

Ecriture de l'équa. du mvt dans le cas $\delta < \omega_0$

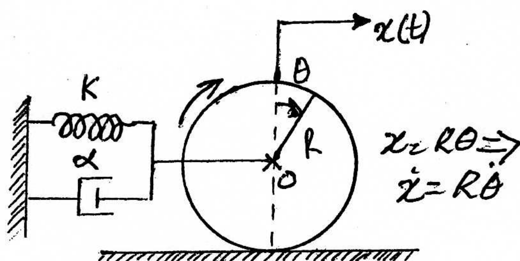
La solution est de la forme

$$\theta(t)=Ce^{-\delta t}\sin(\omega_a t+\varphi)$$

Exercice N°4

disque roule sans glisser

$J_0=\frac{1}{2}MR^2$



$x=R\theta \Rightarrow \dot{x}=R\dot{\theta}$

* Détermination de l'équa. diff. du mvt

$$T=\frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}M\dot{x}^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2=\frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2$$

$$U=\frac{1}{2}K(R\theta)^2,\quad D=\frac{1}{2}\alpha(R\dot{\theta})^2$$ → (1,5)

$$L=T-U=\frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}K(R\theta)^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=\frac{3}{2}MR^2\dot{\theta}\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=-KR^2\theta,\quad\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}}=\alpha R^2\dot{\theta}$$

Donc le formalisme de Lagrange s'écrit

$$\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta}+KR^2\theta=-\alpha R^2\dot{\theta}\Rightarrow$$

$$3M\ddot{\theta}+2\alpha\dot{\theta}+2K\theta=0$$ (1pt)

Déduction de δ et ω_0

$$\ddot{\theta}+\underbrace{\frac{2\alpha}{3M}}_{2\delta}\dot{\theta}+\underbrace{\frac{2K}{3M}}_{\omega_0^2}\theta=0$$

$$2\delta=\frac{2\alpha}{3M}\Rightarrow\delta=\frac{\alpha}{3M},\quad\omega_0^2=\frac{2K}{3M}\Rightarrow\omega_0=\sqrt{\frac{2K}{3M}}$$

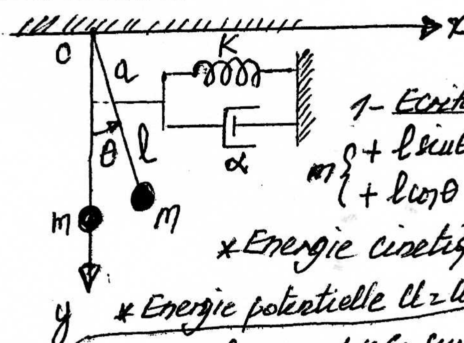
Equation diff $\ddot{\theta}+2\delta\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$

$$\omega_a=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}=\sqrt{\frac{2K}{3M}-\frac{\alpha^2}{9M^2}}=\omega_a$$ → (0,5)

* ~~Trouvons l'équation~~ du mvt qd $\delta=\omega_0$

$$\theta(t)=(C_1+C_2t)e^{-\delta t}$$ — (1pt)

Exercice N°5



1- Ecriture de l'équa. diff

$m\begin{cases}+l\sin\theta\\+l\cos\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}l\dot{\theta}\cos\theta\\-l\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}$

* Energie cinétique $T=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$ (0,5)

* Energie potentielle $U=U_m+U_K$

$$U=-mgl\cos\theta+\frac{1}{2}K(a\sin\theta)^2$$ (1pt)

* Fonction de dissipation $D=\frac{1}{2}\alpha(a\dot{\theta}\cos\theta)^2$ (0,5)

* Fonction de Lagrange

$$L=T-U=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl\cos\theta-\frac{1}{2}K(a\sin\theta)^2$$

Le formalisme de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=-\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}}$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta}\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=-mgl\underbrace{\sin\theta}_{\theta}-K(a\underbrace{\cos\theta}_{1})(a\underbrace{\sin\theta}_{\theta})$$

$$\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}}=\alpha(a\underbrace{\cos\theta}_{1})(a\dot{\theta}\underbrace{\cos\theta}_{1})$$

$$\Rightarrow ml^2\ddot{\theta}+(mgl+Ka^2)\theta=-\alpha a^2\dot{\theta}$$

Equa. diff. $\Rightarrow ml^2\ddot{\theta}+\alpha a^2\dot{\theta}+(mgl+Ka^2)\theta=0$ (1pt)

* Détermination de la pulsation propre ω_a

On peut écrire l'équa. diff. comme suit

$$\ddot{\theta}+\underbrace{\frac{\alpha a^2}{ml^2}}_{2\delta}\dot{\theta}+\underbrace{\frac{mgl+Ka^2}{ml^2}}_{\omega_0^2}\theta=0$$

$$\delta=\frac{\alpha a^2}{2ml^2},\quad\omega_0=\sqrt{\frac{mgl+Ka^2}{ml^2}}$$

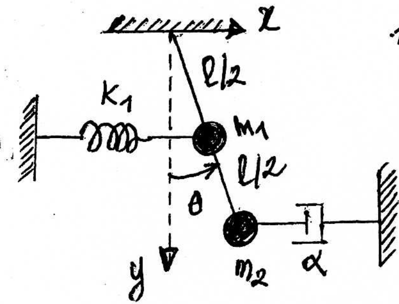
a pulsation propre $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$$\omega_a = \sqrt{\frac{mgl + Ka^2}{ml^2} - \frac{\alpha^2 a^4}{4m^2 l^4}} \rightarrow (0,5)$$

* Ecriture de la solution du mvt qd $\delta < \omega_0$

$$\theta(t) = C e^{-\delta t} \sin(\omega_a t + \varphi) \rightarrow (0,5)$$

Exercice 06



1- Ecriture de l'équa. diff du mvt

$m_1 \begin{cases} + l/2 \sin\theta \\ + l/2 \cos\theta \end{cases}$

$m_1 \begin{cases} \frac{l}{2}\dot\theta \cos\theta \\ -\frac{l}{2}\dot\theta \sin\theta \end{cases}$

$m_2 \begin{cases} + l \sin\theta \\ + l\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l\dot\theta\cos\theta \\ -l\dot\theta \sin\theta \end{cases}$

$\Rightarrow$ Energie cinétique $T = T_{m_1} + T_{m_2} = \frac{1}{2} m_1 \frac{l^2}{4}\dot\theta^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot\theta^2$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{4} + m_2\right) l^2 \dot\theta^2 \rightarrow (0,5)$$

: Energie potentielle $U = U_{m_1} + U_{m_2} + U_K = -m_1 g \frac{l}{2}\cos\theta$
$- m_2 g l \cos\theta + \frac{1}{2} K \left(\frac{l}{2}\sin\theta\right)^2$

$$U = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g l \cos\theta + \frac{1}{2} K \left(\frac{l}{2}\sin\theta\right)^2 \rightarrow (1pt)$$

• Fonction de Dissipation $D = \frac{1}{2}\alpha (l\dot\theta \cos\theta)^2 \rightarrow (0,5)$

Fonction de Lagrange $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{4} + m_2\right) l^2\dot\theta^2 + \left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g l \cos\theta - \frac{1}{2} K \left(\frac{l}{2}\sin\theta\right)^2$$

Formalisme de Lagrange $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot\theta}$

$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = \left(\frac{m_1}{4} + m_2\right) l^2 \dot\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = \left(\frac{m_1}{4} + m_2\right) l^2 \ddot\theta$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g l \underbrace{\sin\theta}_{\theta} - K\left(\frac{l}{2}\underbrace{\cos\theta}_{1}\right)\left(\frac{l}{2}\underbrace{\sin\theta}_{\theta}\right)$

$\frac{\partial D}{\partial \dot\theta} = \alpha (l \underbrace{\cos\theta}_{1})(l\dot\theta \underbrace{\cos\theta}_{1})$

$\left(\frac{m_1}{4} + m_2\right) l^2 \ddot\theta + \left[\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g l + \frac{K l^2}{4}\right]\theta = -\alpha l^2 \dot\theta$

$$\left(\frac{m_1}{4} + m_2\right) l^2 \ddot\theta + \alpha l^2 \dot\theta + \left[\left(\frac{m_1}{2} + m_2\right) g l + \frac{K l^2}{4}\right]\theta = 0$$

on donne $\frac{m_1}{4} = m_2 = m$ et $\frac{K_1}{4} = K$

$$\Rightarrow 2ml^2\ddot\theta + \alpha l^2 \dot\theta + (3mgl + Kl^2)\theta = 0 \quad (1pt)$$

* Détermination la pulsation propre ω_a

On peut écrire l'équa. diff. comme

$$\ddot\theta + \underbrace{\frac{\alpha}{2m}}_{2\delta}\dot\theta + \underbrace{\left(\frac{3}{2}\frac{g}{l} + \frac{K}{2m}\right)}_{\omega_0^2}\theta = 0$$

$2\delta = \frac{\alpha}{2m} \Rightarrow \delta = \frac{\alpha}{4m}$, $\omega_0^2 = \frac{3g}{2l} + \frac{K}{2m}$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l} + \frac{K}{2m} - \frac{\alpha^2}{16m^2}} \quad (0,5)$$

* Détermination de la solution du mvt qd $\delta < \omega_0$ pour les Conditions initiales suivantes

$\theta(0) = \theta_0$ et $\dot\theta(0) = 0$

La solution est de la forme

$$\begin{cases} \theta(t) = e^{-\delta t}(C_1 \sin\omega_a t + C_2 \cos\omega_a t) \quad (0,5) \\ \dot\theta(t) = -\delta e^{-\delta t}(C_1 \sin\omega_a t + C_2 \cos\omega_a t) + e^{-\delta t}(C_1 \omega_a \cos\omega_a t - C_2 \omega_a \sin\omega_a t) \end{cases}$$

$\theta(0) = C_2 = \theta_0$

$\dot\theta(0) = -\delta C_2 + C_1 \omega_a = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{\delta}{\omega_a} C_2$

$$C_1 = \frac{\delta}{\omega_a}\theta_0$$

$\Rightarrow \theta(t) = e^{-\delta t}\left(\frac{\delta}{\omega_a}\theta_0 \sin\omega_a t + \theta_0 \cos\omega_a t\right)$

$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_0 e^{-\delta t}\left(\frac{\delta}{\omega_a}\sin\omega_a t + \cos\omega_a t\right)$$